RRC I ROK FIZYKI I ASTRONOMII
LISTA 1

1. Niech $n \in \mathbf{N}$ i $m \in \mathbf{Z}$. Symbol $n|m$ oznacza, że liczba n jest dzielnikiem liczby m. Wykaż, że $2|(n^2 - n)$ i $3|(n^3 - n)$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Czy prawdziwe jest stwierdzenie, że dla dowolnych liczb naturalnych k i n zachodzi $k|(n^k - n)$?
2. Wykaż, że pierwiastek z dowolnej liczby pierwszej jest liczbą niewymierną.
3. Wykaż, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
4. Metodą indukcji wykaż, że $\forall n \in \mathbf{N}$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Metodą indukcji udowodnij, że jeśli liczby $a_k \geqslant -1$, $k = 1, 2, ..., n$, mają ten sam znak, to

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Jest to uogólnienie nierówności Bernoulliego.
6. Metodą indukcji udowodnij, że jeśli $a_1, a_2, ..., a_n$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, to $a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant n$.
7. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ to liczby rzeczywiste dodatnie. Definiujemy średnią arytmetyczną A_n, geometryczną G_n i harmoniczną H_n wzorami

$$A_n = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \quad G_n = \sqrt[n]{x_1...x_n} \quad H_n = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1}$$

Wykaż, że $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n$.
Wskazówka: skorzystaj z zad. 6.
8. Samochód przejechał trasę z miejscowości A do B z szybkością v_1, a drogę powrotną z szybkością v_2. Wykaż, że średnia szybkość samochodu jest średnią harmoniczną szybkości v_1 i v_2.
9. Samochód jechał przez określoną chwilę czasu t z szybkością v_1, a następnie przez taką samą chwilę z szybkością v_2. Wykaż, że średnia szybkość samochodu jest średnią arytmetyczną szybkości v_1 i v_2.
10. Nie obliczając wartości wyrażeń opuść znak modułu:

$$\text{a) } |\sqrt{3} - \sqrt[3]{5}| \qquad \text{b) } |3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}|$$

11. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$|\sqrt{a^2+b^2} \ - \ \sqrt{a^2+c^2}| \leqslant \ |b-c|$$

Wywnioskuj stąd, że $|\,|b| \ - \ |c|\,| \leqslant |b-c|$.
12. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{bc}{a} \ + \ \frac{ac}{b} \ + \ \frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$$

13. Niech A, B to niepuste zbiory liczbowe. Wykaż, że

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

14. Wyznacz kresy następujących zbiorów liczbowych:
a) $A = \{\frac{(n+1)^2}{2^n} : \ \ n \in \mathbf{N}\}$,
b) $B = \{\frac{m}{n} : \ \ m, n \in \mathbf{N}, m < 2n\}$,
c)* $C = \{n - [\sqrt{n}\,] : \ \ n \in \mathbf{N}\}$,
d) $D = \{z = x + \frac{1}{x} : \ \ x \in \mathbf{R}_+\}$.
15.* Niech x to liczba niewymierna. Definiujemy zbiór $A = \{n+mx : \ \ n, m \in \mathbf{Z}\}$. Wykaż, że zbiór A jest gęsty w $\mathbf{R}$.

Uwaga. Zadania oznaczone gwiazdką są nieobowiązkowe.

Robert Olkiewicz